Μαθημα 5ο   23/10/2017

Διαφ. Εξ.

Ασκηση 5 iii, σελ 36

$y' - y + e^{-x} y^2 = 4e^x$, μια λυση ειναι $y_1 = ke^{\lambda x}$

$y_1 = ke^{\lambda x}$, $y_1' = k\lambda e^{\lambda x}$

Κανω αντικατασταση την y_1

$k\lambda e^{\lambda x} - ke^{\lambda x} + e^{-x} k^2 e^{2\lambda x} - 4e^x = 0$

$k\lambda e^{(\lambda-1)x} + ke^{(\lambda-1)x} + k^2 e^{2x(\lambda-1)} = 4$

Δινω τιμη $\lambda = 1$: $k - k + k^2 = 4 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$

Μια λυση λοιπον ειναι $y_1 = 2e^x$

Μετασχηματισμος $y = 2e^x + \frac{1}{z}$

Μετα απο πραξεις εχουμε : $z' - 3z = e^{-x}$

Γενικη λυση:

$z(x) = e^{3x} \left[c + \int e^{-x} e^{-3x} dx \right] \Rightarrow$

$z(x) = e^{3x} \left[c + \int e^{-4x} dx \right] \Rightarrow$

$z(x) = e^{3x} \left[c - \frac{1}{4} e^{-4x} \right] \Rightarrow$

$z(x) = e^{3x} \cdot c - \frac{1}{4} e^{-x}$

Οποτε $y_1 = 2e^x$

$y(x) = 2e^x + \dfrac{1}{ce^{3x} - \frac{1}{4} e^{-x}}$

→ Αν εχω $y(0) = 1$ τοτε $c = -3/4$ και

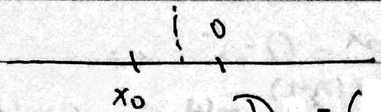
$y(x) = 2e^x + \dfrac{1}{-\frac{3}{4} e^{3x} - \frac{1}{4} e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$

→ $y(0)=3$ τότε $c = 5/4$ και

$$y(x) = 2e^{x} + \frac{1}{\frac{5}{4}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x}}$$

$$\frac{5}{4}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x} = 0 \Rightarrow 5e^{3x} = e^{-x} \Rightarrow$$

$$x_0 = -\log \sqrt[4]{5}$$



$D_y = (x_0, +\infty)$

→ $y(0)=2$ τότε $2 + \frac{1}{c-\frac{1}{4}} = 2$

↳ Δεν ικανοποιείται αυτή η αρχική τιμή

Εξίσωση α' βαθμού (Επίλυση χωριζόμενων μεταβλητών)

$y' = f(t,y)$ Γενική μορφή (όλες ανάγονται σε αυτή τη μορφή)

$y' = h(t)g(y)$ είναι εύκολο να λυθεί

$g(y) \neq 0$: $\frac{y'}{g(y)} = h(t)$

Ορισμένη ολοκλήρωση

$$\int_{t_0}^{t} \frac{y'}{g(y)}\,dt = \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds$$

κάνω αλλαγή $y(t) = u \Rightarrow y' = \frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt}$

Οπότε

$$\int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds \Rightarrow G(y(t)) - G(y(t_0)) = \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds \Rightarrow$$

$$G(y(t)) = c + \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds \Rightarrow y(t) = G^{-1}\left[c + \int_{t_0}^{t} h(s)\,ds\right]$$

Πιο εύκολο είναι να χρησιμοποιήσω τύπο Leibnitz

$$y' = \frac{dy}{dt} = \frac{h(t)}{g(y)} \Rightarrow g(y)\,dy = h(t)\,dt$$

$$G(y) = \int h(t)\,dt + c$$

Άσκηση 2 ή φυλλάδιο 4' → έχω πρόβλημα γιατί αν βάλω $y=0$ γίνεται $0=1$ άρα μήπως δεν έχει λύση; Εμείς θέλουμε να έχει λύση! άρα τι συμβαίνει με την y'

$$(y+yx^2)y' = x \quad , \quad y(1) = 0$$

Είναι χωριζόμενων μεταβλητών

$$y(1+x^2)y' = x$$

$$y\,dy = \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

(+) Οι λύσεις μας θέλω να είναι συνεχώς παραγωγίσιμες

$$\int y\,dy = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

$$y^2 = \ln(1+x^2) + 2c \quad (\geq 0)$$

$$y = \pm\sqrt{\ln(1+x^2)+2c}$$

Ισχύει $y(1) = 0 \Rightarrow 0 = \pm\sqrt{\ln(1+1)+2c} \Rightarrow \ln 2 + 2c = 0 \Rightarrow$

$\ln 2 = -2c \Rightarrow c = -\frac{1}{2}\ln 2$

$\frac{1+x^2}{2} \geq 1$

Οπότε $y(x) = \pm\sqrt{\left|\ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right)+C\right|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχω τουλάχιστον 2 λύσεις

- όταν $x=1$ τότε $\sqrt{\ln 1} = \sqrt{0}$ και θα έχω πρόβλημα με την παράγωγο. Άρα η παράγωγος απειρίζεται

Παραδειγμα 2, σελ 38

$2x(y^2+y)dx = -(x^2-1)y\,dy$ οι λυσεις δε πρεπει να μηδενιζουν τους παρονομαστες

$$\frac{2x}{x^2-1}dx = \frac{y^2}{y^2+y}dy$$

Ψαχνω αν υπαρχουν σταθερες λυσεις, φαινεται απο την αρχη $y=0$, $y=-1$ ειναι λυσεις. Αρα ξερω δυο λυσεις και παω να βρω τις υπολοιπες.

$$\int \frac{2x}{x^2-1}dx = \int -\frac{y}{y^2+y}dy \iff (x^2-1)(y+1) = \pm e^{c} = c', \quad c \neq 0$$

$$\iff y = -1 + \frac{c}{x^2-1}, \quad x \neq \pm 1$$

Αν μας πουνε $y(0)=2$ τοτε $2 = -1 + \frac{c}{-1} \Rightarrow \dots c =$

και το πεδιο ορισμου θα οριζεται στο $(1, +\infty)$

⊛ $f(x,y)$: ομογενης $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{a} f(x,y)$

παραδειγμα

$f(x,y) = 2x^2y^3 + xy^4 + x^5$

$f(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda^2x^2\lambda^3y^3 + \lambda x\lambda^4y^4 + \lambda^5 x^5 =$

$= \lambda^5[2x^2y^3 + xy^4 + x^5] = \lambda^5 f(x,y)$

αρα ειναι ομογενης

Ομογενής Διαφ Εξίσ.

$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ με f, g ομογενείς ίδιου βαθμού

Μετασχηματισμός $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = zx$ και $y' = z'x + z$

$f(x,y) = f(x, y/x \cdot x)$

$= x^a f(1, y/x)$

$y' = \frac{x^a f(x, \frac{y}{x})}{x^a g(x, \frac{y}{x})} \Rightarrow z'x + z = \frac{f(x,z)}{g(x,z)}$

Παράδειγμα 2, σελίδα 40.

$(x^2+y^2)dx + 2xy\,dy = 0$, $y(1) = -1$

θέλω να δω αν λύνεται για σταθερές μεταβλητές

ούτε είναι χωριζόμενων μεταβλητών

$(x^2+y^2)dx + 2xy\,dy = 0 \Rightarrow$

$(x^2+y^2)dx = -2xy\,dy$

$-\frac{x^2+y^2}{2xy} = \frac{dy}{dx}$: Είναι ίδιου βαθμού

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$

Μετασχηματισμός : $z = \frac{y}{x} \Rightarrow zx = y$ και $y' = z'x + z$

Έχω : $z'x + z = -\frac{1+z^2}{2z} \Rightarrow z'x = -\frac{1+z^2}{2z} - z \Rightarrow$

$\frac{dz}{dx}x = \frac{1+z^2-2z^2}{2z} \Rightarrow -\frac{2z}{1+3z^2}dz = \frac{1}{x}dx$

..... βιβλίο

⊛ Μη ομογενης

$$y' = \frac{a_1 x + b_1 y + \gamma_1}{a_2 x + b_2 y + \gamma_2}$$

Θετω $\quad Y = y + y_0$ → Τα ψαχνω

$\quad X = x + x_0$

Θελω να την κανω ομογενη → κανονας αλυσιδας

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dX} = 1 \cdot \frac{dy}{dx} \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}$$

Εφοσον 0 ⇒ το επιλυω πιο ευκολα

οποτε

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1(X-x_0)+b_1(Y-y_0)+\gamma_1}{a_2(X-x_0)+b_2(Y-y_0)+\gamma_2} = \frac{a_1 X + b_1 Y - \overset{0}{\cancel{(a_1x_0+b_1y_0-\gamma_1)}}}{a_2 X + b_2 Y - \overset{0}{\cancel{(a_2x_0+b_2y_0-\gamma_2)}}}$$

Εχουμε $\left.\begin{array}{l} a_1x_0 + b_1y_0 = \gamma_1 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = \gamma_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ βγαζω το x_0, y_0

$$\Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}$$ ομογενης $(z = Y(X))$ α' ταξης

Ασκηση

$(x-y+3)dx + (x+2y-3)dy = 0$

α' βαθμου   α' βαθμου

Βημα 1ο

Λυσεις του συστηματος

$$\begin{cases} x-y=-3 \\ x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \quad y=2 \text{ και } x=-1$$

Βημα 2ο

Αλλαγή μεταβλητής

$X = x-1$

$Y = y+2$

Βημα 3ο

προσέξεις!

Εχουμε $\dfrac{dY}{dX} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right) = -\dfrac{X-Y}{X+2Y}$

(*) $y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$

Βαζω $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ και $z' = \alpha x' + \beta y'$

Αρα εχω $y' = \dfrac{z'-\alpha}{\beta} \Rightarrow f(z) = \dfrac{z'-\alpha}{\beta}$